Fonctions III
Sens de Variation

I. Définitions

Principe

Faisons varier une variable. Considérons que nous augmentons sa valeur continûment (c'est-à-dire sans faire de saut) et même à vitesse constante. On peut se représenter cette variable comme un curseur que l'on déplacerait sur l'axe des réels dans le sens positif, en un mouvement « rectiligne uniforme », comme disent les physiciens, de façon qu'il représente sommairement quelque chose comme l'écoulement du temps.

À cette variable « temporelle », lions-en une seconde, par le truchement d'une *fonction*. Lorsque la première variable, l'*opérande*, varie, la seconde, son *image*, varie aussi ; mais pas forcément de la même manière. Elle peut augmenter elle aussi, mais en accélérant ou en décélérant ; elle peut diminuer, osciller, bondir… Tout dépend de la *fonction* qui la lie à la première variable… et de l'intervalle où se trouve cette variable. Lorsque l'image augmente, on dira que la fonction est *croissante* ; et quand elle diminue, que la fonction est *décroissante*. C'est la discrimination de ces deux cas qu'on appelle le *sens de variation* d'une fonction. Ce sens de variation, pour une même fonction, peut changer.

Il est particulièrement intéressant mais aussi particulièrement difficile de savoir à quel moment exactement une fonction donnée

change de *sens de variation*. Intéressant car à cet instant, elle atteint une valeur maximale ou minimale, dont la connaissance peut être utile aussi bien en mathématiques que dans d'autres domaines, comme en physique. Difficile, car le problème ne se laisse pas comme cela mettre en équation : on veut savoir à quel moment une valeur maximale est atteinte, mais sans connaître cette valeur. Ou l'on veut connaître cette valeur, mais sans savoir exactement à quel moment elle est atteinte. C'est comme si nous avions deux inconnues pour une seule équation. On manque d'une méthode, voire d'un concept, qui permette de traduire algébriquement l'idée que l'image, dans son mouvement, passe par un état où, sur la pointe d'un instant, sa vitesse s'annule.

La première chose à faire, pour aborder le concept délicat du sens de variation, sera d'en élaborer une *définition*. Mais déjà, ce n'est pas chose aisée, car on entend par fonction croissante, sur un intervalle donné, une fonction dont l'image *ne cesse* de croître, une fonction dont l'image, sur cet intervalle, ne décroît à aucun moment. Il ne suffira donc pas de tester la valeur prise par la fonction au début et à la fin de l'intervalle considéré, mais *partout*. Cela fait une infinité de comparaisons…

Pour démontrer qu'une fonction est croissante sur un intervalle, il faudra bien traiter cette infinité de cas. Est-ce possible ? Oui, à la condition de ne surtout pas remplacer les variables de la définition par des valeurs constantes, arbitrairement choisies. Il faudra au contraire préserver tout au long du calcul (qui ne sera donc pas *numérique*, mais *algébrique*) leur statut de variables.

Fonction croissante

Une fonction f est **croissante** sur un <u>intervalle</u> I <u>ssi</u> :
<u>quels que soient</u> les réels x et y appartenant à I et tels que $x < y$, on a : $f(x) \leq f(y)$.

Remarques

Si l'on considère la représentation graphique de f, la variable « y » sera, contrairement à certaines habitudes, représentée en abscisse, tout comme x. Si cela gêne, on pourra appeler les deux variables x_1 et x_2, ou x et x'.

Cette définition est sans doute la plus subtile que vous ayez rencontrée jusqu'à présent. Le temps que vous passerez à la lire, l'analyser, la « questionner », l'apprendre, ne sera pas du temps perdu.

Voici trois définitions erronées parfois rencontrées en interrogation :

- « Quels que soient x et y appartenant à I tels que $x<y$, f est croissante sur I <u>ssi</u> $f(x) \leq f(y)$ »

La place des *quantificateurs* (« quel que soit… » et « il existe… ») dans une phrase mathématique est déterminante. Par exemple, si je dis que « pour tout homme, il existe une femme qui lui soit plus petite », cela signifie que le plus petit adulte du monde est une femme. Si je dis qu'« il existe un homme tel que toute femme lui soit plus petite », cela signifie que le plus grand adulte du monde est un homme. Par ailleurs, avec cette « définition », le fait qu'une fonction soit croissante sur un intervalle dépendrait d'autre chose que de cette fonction et de cet intervalle : de deux réels choisis arbitrairement.

- « f est croissante sur I <u>ssi</u> quels que soient x et y appartenant à I, $x<y$ et $f(x) \leq f(y)$ ».

Or, dans la vraie définition, ce n'est pas d''une *conjonction*, qu'il s'agit mais d'une *implication* : quels que soient x et y appartenant à I, **si** $x<y$ **alors** $f(x) \leq f(y)$.

- « f est croissante sur I ssi, quel que soit x appartenant à I, $x < f(x)$ »

Pour certains élèves, une fonction croissante est une fonction qui augmente les nombres, une fonction dans laquelle l'*image* est toujours supérieure à l'*opérande*. Ils partent de cette idée, induite, non sans raison, dans leur esprit par le terme de « fonction croissante » et s'y accrochent. S'ils tiennent à leur concept, ils peuvent le baptiser autrement. Qu'ils appellent par exemples « augmentantes » de telles fonctions. Et qu'ils se posent alors quelques questions à son sujet. Par exemple : comment cela se traduit-il graphiquement ?

Autres définitions

Dans ce qui suit, f est une fonction et I un <u>intervalle</u> (inclus dans l'ensemble de définition de f).

f est **décroissante** sur I <u>ssi</u>
<u>quels que soient</u> les réels x et y appartenant à I et tels que $x < y$, on a : $f(x) \geq f(y)$.

f est **strictement croissante** sur I <u>ssi</u>
<u>quels que soient</u> les réels x et y appartenant à I et tels que $x < y$, on a : $f(x) < f(y)$.

f est **strictement décroissante** sur I <u>ssi</u>
<u>quels que soient</u> les réels x et y appartenant à I et tels que $x < y$, on a : $f(x) > f(y)$.

f est **monotone** sur I <u>ssi</u>
$(f$ est croissante sur $I)$ ou $(f$ est décroissante sur $I)$.

f est **constante** sur I <u>ssi</u>
il existe un réel k tel que, quel que soit x appartenant à I, $f(x) = k$

Etudier les variations de f, c'est déterminer sur quels intervalles elle croît et sur quels intervalles elle décroît.

REMARQUES Nous proposons d'appeler « **bornes de monotonie** » les valeurs pour lesquelles une fonction change de sens de variation. Et « **intervalles de monotonie** » les intervalles entre ces bornes. En seconde, nous ne disposons pas de méthodes générales pour déterminer les « *intervalles de monotonie* » d'une fonction. C'est donc l'énoncé qui devra proposer les intervalles sur lesquels étudier les variations. En première, la puissante notion de fonction dérivée d'une fonction remédiera à ce problème.

Sur un intervalle donné, une fonction qui n'est pas croissante n'est pas pour autant forcément décroissante. Elle peut croître et décroître alternativement, auquel cas elle n'est pas « croissante et décroissante » (ce que seule est une fonction constante), mais ni l'un ni l'autre.

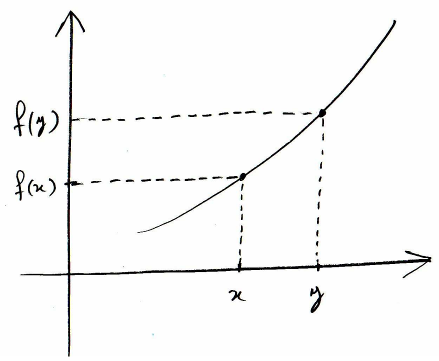
II. INTERPRÉTATIONS

Sur un intervalle donné…

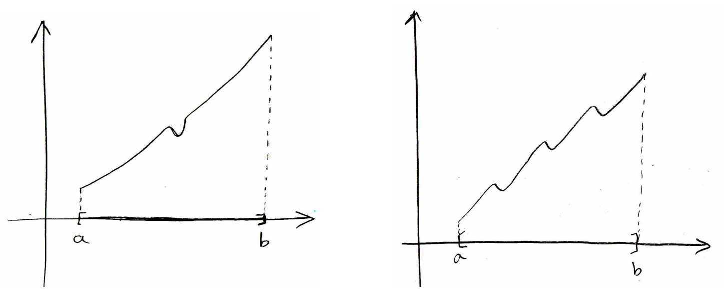
VARIATION Une fonction croissante est une fonction dont la 'valeur' croît et ne fait que croître (au sens où elle ne décroît jamais) tandis qu'augmente la 'variable'.

ORDRE Une fonction croissante est une fonction qui conserve l'ordre : les images sont toujours dans le même ordre que les « opérandes ». (Nous avons choisi d'appeler « opérande » le nombre qu'on entre dans la fonction.) Une fonction décroissante 'inverse' l'ordre.

COURBE Une fonction croissante est une fonction dont la courbe 'monte' (sans jamais redescendre) lorsqu'on la parcours dans le sens de la lecture (sens positif de l'axe des abscisses).



REMARQUE Les fonctions représentées ci-dessous ne sont pas croissantes sur $[a;b]$:



III. CAS DES FONCTIONS USUELLES

FONCTION CARRÉ

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

TABLEAU DE VARIATION :

Dans un **tableau de variation**, une flèche montante indique que la fonction est croissante (sur l'intervalle considéré) et une flèche descendante, que la fonction est décroissante. (Les flèches étant toujours orientées dans le sens de la lecture.)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

(Le zéro de la seconde ligne n'a pas le même sens que celui de la première : celui de la seconde ligne est une image.)

DÉMONSTRATION : en exercice.

FONCTION INVERSE

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et aussi strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

TABLEAU DE VARIATION :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

(La double barre verticale signifie que la fonction n'est pas définie pour la valeur indiquée.)

DÉMONSTRATION : en exercice.

FONCTION RACINE (Hors programme.)

La fonction racine est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

TABLEAU DE VARIATION :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

DÉMONSTRATION 1 :

Soient x et y tels que $0 \leq x < y$.

Supposons que $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$. Alors, la fonction carré étant croissante sur $[0;+\infty[$, on aurait : $\left(\sqrt{x}\right)^2 \geq \left(\sqrt{y}\right)^2$, c'est-à-dire : $x \geq y$, ce qui contredirait l'hypothèse initiale. Donc $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

DÉMONSTRATION 2 :

Soient x et y tels que $0 \leq x < y$.

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}$$

Or $x < y$ donc $0 < y - x$

De plus : $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{y} > 0$ (seule la racine de 0 est nulle et (seule la racine de 0 est nulle et y n'est pas nul, donc $\sqrt{y} \neq 0$). Donc $\sqrt{y} + \sqrt{x} > 0$. Donc $\dfrac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} > 0$.

Donc $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 0$

Donc $\sqrt{y} > \sqrt{x}$.

IV. CAS DES FONCTIONS AFFINES

THÉORÈME

Soit $f : x \mapsto ax + b$, où a et b sont deux constantes réelles, (avec $a \neq 0$).

Si $a > 0$, f est strictement croissante sur ℝ.

Si $a < 0$, f est strictement décroissante sur ℝ.

TABLEAUX DE VARIATION

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f	↗	0	↗

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f	↘	0	↘

DÉMONSTRATION

<u>Si a>0</u> :

<u>Soient x et y deux réels tels que $x<y$</u>

$ax < ay$ car $a>0$

donc : $ax + b < ay + b$

<u>$f(x) < f(y)$</u>

<u>Si a<0</u> :

<u>Soient x et y deux réels tels que $x<y$</u>

$$ax > ay \qquad \text{car } a<0$$

donc : $$ax + b > ay + b$$

$$\underline{f(x) > f(y)}$$

Application

Lorsqu'on résout une équation de degré 2 (ou plus), pour remplir le tableau <u>de signe</u> (attention, il faut distinguer un tableau de *signe* d'un tableau de *variation*), on peut utiliser le théorème qu'on vient de démontrer. En effet, considérons la fonction $f : x \mapsto ax + b$.

Si a est positif, comme f est croissante, à mesure que x augmente, $f(x)$ est d'abord négatif, s'annule, puis devient positif.

Si a est négatif, comme f est décroissante, à mesure que x augmente, $f(x)$ est d'abord positif, s'annule, puis devient négatif. Exemples :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$+2x-5$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	0	$-$	

V. Cas des fonctions polynômes du second degré

Remarque Les tableaux de variation qui suivent sont en réalité des théorèmes. Ces théorèmes sont donnés ici car ils sont au programme, mais nous ne les utiliserons pas pour résoudre les exercices.

Tableaux de variation

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↘		↗

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↗		↘

Démonstration

Dans le cas où $a<0$ et sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$

<u>Soient x et y deux réels tels que $x<y<-\frac{b}{2a}$</u>

$$f(y)-f(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(ay^2+by+c\right)-\left(ax^2+bx+c\right)\\
&= ay^2-ax^2+by-bx\\
&= a\left(y^2-x^2\right)+b\left(y-x\right)\\
&= a\left(y-x\right)\left(y+x\right)+b\left(y-x\right)\\
&= \left(y-x\right)\left[a\left(y+x\right)+b\right]
\end{aligned}$$

Or : • $\begin{cases} x<-\dfrac{b}{2a} \\ y\le-\dfrac{b}{2a}\end{cases}$ donc $y+x<-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{b}{2a}$

donc $y+x<-\dfrac{b}{a}$

donc $a\left(y+x\right)>-b$ car $a<0$

donc $\underline{a\left(y+x\right)+b>0}$

• $x<y$ donc $\underline{y-x>0}$

Donc : $\left(y-x\right)\left[a\left(y+x\right)+b\right]>0$

$f\left(y\right)-f\left(x\right)>0$

$\underline{f\left(y\right)>f\left(x\right)}$.

VI. ÉQUIVALENCES

PRINCIPE La définition d'une fonction strictement monotone contient une *implication* (un si… alors) qui, moyennant quelques précautions, peut être remplacé par une *équivalence* (un *si et seulement si*). Ces équivalences permettent de transformer une inégalité en appliquant à ses deux membres une même fonction *strictement* monotone.

THÉORÈMES Soient f une fonction, I un intervalle, x et y appartenant à I.

Si f est strictement croissante sur I : $x<y \Leftrightarrow f\left(x\right)<f\left(y\right)$

$x\le y \Leftrightarrow f\left(x\right)\le f\left(y\right)$

Si f est strictement décroissante sur I : $x<y \Leftrightarrow f\left(x\right)>f\left(y\right)$

$x\le y \Leftrightarrow f\left(x\right)\ge f\left(y\right)$

DÉMONSTRATION (Du premier théorème.)

Si $x<y$ alors, par la définition d'une fonction croissante, $f(x)<f(y)$

Si $x=y$, alors, bien entendu, $f(x)=f(y)$

Si $x>y$, alors, par la définition d'une fonction croissante, $f(x)>f(y)$

REMARQUE L'affirmation suivante est **fausse** :

« Si f est croissante sur I : $x\le y \Leftrightarrow f\left(x\right)\le f\left(y\right)$ »

Contre exemple : prenons une fonction f constante sur $\mathbb{R}$. Alors, $f\left(2\right)\le f\left(1\right)$ est une affirmation vraie, mais $2\le 1$ est fausse.

VII. GLOSSAIRE

truchement Intermédiaire, entremise. Provient d'un mot arabe signifiant « traducteur ».

discrimination Outre son sens courrant connoté négativement, le mot *discriminer* signifie discerner, séparer, distinguer. En première, lorsqu'on étudie les équations du second degré, on apprend à calculer leur *discriminant*, qui est un nombre dont le signe permet de séparer les différents cas possibles.